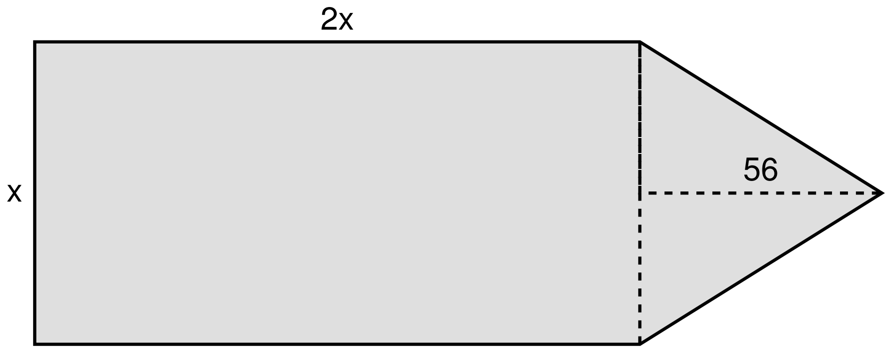
Exercice 1 : Le champ du père Bono

Le père Bono n'arrive pas à regrouper ses vaches quand il faut les ramener à l'étable.

Il souhaite placer un enclos rectangulaire adossé à une parcelle triangulaire sur son champ, comme sur le schéma ci-dessous, pour faciliter le regroupe- ment de ses bêtes.

Il déclare alors ! : « Mon champ aura cette forme ou je ne m'appelle pas Jean ! »

Cependant, il est nécessaire de prévoir une surface minimale de 11152m^2 pour que les vaches puissent paitre.



[1] Montrer que le père Bono doit résoudre l'inéquation :

$$2x^2 + 28x - 11152 \geqslant 0$$

Aire du rectangle : $2x \times x = 2x^2$

Aire du triangle : $\frac{base \times hauteur}{2} = \frac{x \times 56}{2} = 28x$

Aire du champ : $2x^2 + 28x$

L'aire du champ doit être supérieur à 11152 donc on doit déterminer x tel que :

$$2x^2 + 28x \geqslant 11152$$
$$2x^2 + 28x - 11152 \geqslant 0$$ (on soustrait 11152)

[2] Démontrer que :

$$2x^2 + 28x - 11152 = (2x - 136)(x + 82)$$

En développant, on obtient :

$$(2x - 136)(x + 82) = 2x^2 + 164x - 136x - 136 \times 82$$
$$+ 2x^2 + 28x - 11152$$

[3] Déterminer les dimensions possibles du champ voulu par le père Bono.

Pour résoudre l'inéquation, on réalise le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-82		68		$+\infty$
signe de $2x - 136$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $x + 82$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $(2x - 136)(x + 82)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Pour répondre au problème, on ne considère que les solutions positives de linéquaiton car x est une longueur de champ donc un nombre positif.

On en conclut que M. Bono doit choisir x supérieur à 68.

Exercice 2 : Lettre J

Dans une feuille rectangulaire de dimensions 20cm par 30cm, Jade souhaite découper l'initiale de son prénom en utilisant la même largeur pour toutes les bandes blanches qui la composent.

On veut déterminer quelle largeur elle peut choisir pour que l'aire de la partie inutilisée (en gris dans la figure) représente moins du tiers de la feuille.

[1] Déterminer une inéquation qui permet de répondre au problème.

Les dimensions du rectangle grisé sont : $20 - x$ et $30 - x$. Donc l'aire du rectangle grisé est $(30 - x)(20 - x)$

L'aire du rectangle grisé doit être inférieur au tiers de la feuille donc à : $\frac{1}{3} \times 600 = 200$

D'où l'inéquation :

$$(30 - x)(20 - x) \leqslant 200$$

[2] On a, d'une part :

$$\begin{aligned} & (30 - x)(20 - x) \leqslant 200 \\ \iff & 600 - 30x - 20x + x^2 \leqslant 200 && \text{(développement)} \\ \iff & x^2 - 50x + 600 - 200 \leqslant 0 && \text{(soustraction de 200 aux deux membres)} \\ \iff & x^2 - 50x + 400 \leqslant 0 \end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} & (x - 40)(x - 10) \leqslant 0 && \text{(développement)} \\ \iff & x^2 - 10x - 40x + 400 \leqslant 0 \\ \iff & x^2 - 50x + 400 \leqslant 0 \end{aligned}$$

Les deux inéquations sont équivalentes à une même troisième, donc elles sont équivalentes entre elles.

[3] Répondre au problème.

x	$-\infty$		10		40		$+\infty$
signe de $x - 10$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $x - 40$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $(x - 10)(x - 40)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On sait que x doit être compris entre 0 et 20 car la feuille a pour dimensions 20cm par 30cm ; donc les solutions aux problèmes sont dans 'intervalle $[10; 20]$.

Exercice 3 : Lettre C

Dans une feuille rectangulaire de dimensions 20cm par 30cm, Clothilde souhaite découper l'initiale de son prénom en utilisant la même largeur pour toutes les bandes blanches qui la composent. On veut déterminer quelle largeur elle peut choisir pour que l'aire de la partie inutilisée (en gris dans la figure) représente moins de la moitié de la feuille.

[1] Déterminer une inéquation qui permet de répondre au problème.

Les dimensions du rectangle grisé sont : $20 - x$ et $30 - 2x$. Donc l'aire du rectangle grisé est $(30 - 2x)(20 - x)$

L'aire du rectangle grisé doit être inférieur à la moitié de la feuille donc à : $\frac{1}{2} \times 600 = 300$

D'où l'inéquation :

$$(30 - 2x)(20 - x) \leqslant 300$$

[2] On a, d'une part :

$$\begin{aligned}
& (30 - 2x)(20 - x) \leqslant 300 \\
\iff & 600 - 30x - 40x + 2x^2 \leqslant 300 && \text{(développement)} \\
\iff & 2x^2 - 70x + 600 - 300 \leqslant 0 && \text{(soustraction de 300 aux deux membres)} \\
\iff & 2x^2 - 70x + 300 \leqslant 0 \\
\iff & x^2 - 35x + 150 \leqslant 0 && \text{(division par 2 des deux membres)}
\end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned}
& (x - 30)(x - 5) \leqslant 0 \\
\iff & x^2 - 5x - 30x + 150 \leqslant 0 && \text{(développement)} \\
\iff & x^2 - 35x + 150 \leqslant 0
\end{aligned}$$

Les deux inéquations sont équivalentes à une même troisième, donc elles sont équivalentes entre elles.

[3] Répondre au problème.

x	$-\infty$		5		30		$+\infty$
signe de $x - 5$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $x - 30$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $(x - 5)(x - 30)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On sait que x doit être compris entre 0 et 15 car la feuille a pour dimensions 20cm par 30cm ; donc les solutions aux problèmes sont dans 'intervalle $[5; 15]$.

Exercice 4 : Lettre A

Dans une feuille rectangulaire de dimensions 20cm par 30cm, Abraham souhaite découper l'initiale de son prénom en utilisant la même largeur pour toutes les bandes blanches qui la composent. On veut déterminer quelle largeur il peut choisir pour que l'aire de la partie inutilisée (en gris dans la figure) représente moins du tiers de la feuille.

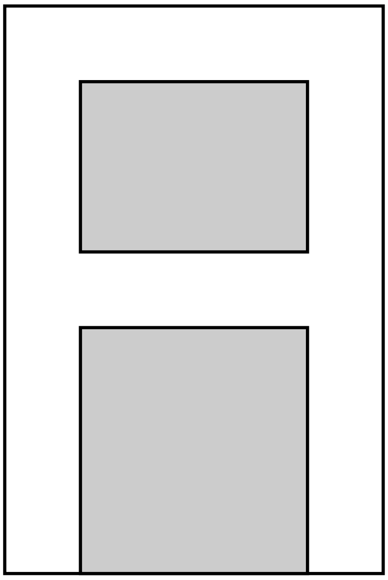
[1] Déterminer une inéquation qui permet de répondre au problème.

[2] Démontrer que cette inéquation est équivalente à :

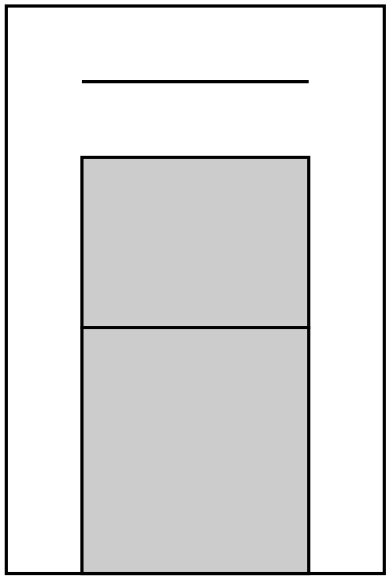
$$(x-20)(x-5) \leqslant 0$$

[3] Répondre au problème.

[1] Déterminer une inéquation qui permet de répondre au problème.



En effectuant une translation de 4 vers le bas du rectangle grisé du haut, on obtient sans changer les aires la figure suivante :



Les dimensions du rectangle grisé sont : $20-2x$ et $30-2x$. Donc l'aire du rectangle grisé est $(30-2x)(20-x)$

L'aire du rectangle grisé doit être inférieur au tiers de la feuille donc à : $\frac{1}{3} \times 600 = 200$

D'où l'inéquation :

$$(30-2x)(20-2x) \leqslant 200$$

[2] On a, d'une part :

$$\begin{aligned} & (30-2x)(20-2x) \leqslant 200 \\ \iff & 600-60x-40x+4x^2 \leqslant 200 & \text{(développement)} \\ \iff & 4x^2-100x+600-200 \leqslant 0 & \text{(soustraction de 200 aux deux membres)} \\ \iff & 4x^2-100x+400 \leqslant 0 \\ \iff & x^2-25x+100 \leqslant 0 & \text{(division par 4 des deux membres)} \end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} & (x-20)(x-5) \leqslant 0 \\ \iff & x^2-5x-20x+100 \leqslant 0 & \text{(développement)} \\ \iff & x^2-25x+100 \leqslant 0 \end{aligned}$$

Les deux inéquations sont équivalentes à une même troisième, donc elles sont équivalentes entre elles.

[3] Répondre au problème.

x	$-\infty$		5		20		$+\infty$
signe de $x-5$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $x-20$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $(x-2)(x-20)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On sait que x doit être compris entre 0 et 10 car la feuille a pour dimensions 20cm par 30cm ; donc les solutions aux problèmes sont dans 'intervalle $[5;10]$.