

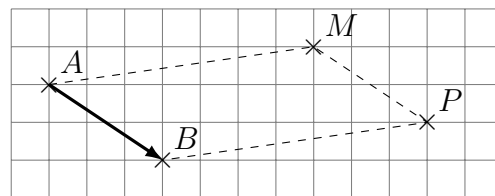
1 Notion de vecteur

À travailler en complément : Activité 1 page 115

Définition.

La **translation** qui transforme A en B est la transformation qui à tout point M associe le point P tel que $ABPM$ est un parallélogramme.

À cette translation, on associe le **vecteur** $\overrightarrow{AB}$ qui permet de définir la translation. La translation qui transforme A et B est appelée **translation de vecteur** $\overrightarrow{AB}$.



Définition.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par :

- sa **direction** qui est déterminée par la droite (AB) ,

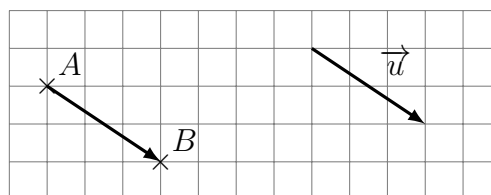
- son **sens**, de A vers B ,

- sa **norme**, la longueur AB notée $\|\overrightarrow{AB}\|$.

Deux vecteurs sont égaux si ils définissent la même translation, c'est à dire s'ils ont même direction, même sens et même norme.

Notations et Vocabulaire : En l'absence de points, ou juste par commodité, on peut noter un vecteur avec une seule lettre, de préférence minuscule.

Ci-contre on a par exemple : $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.

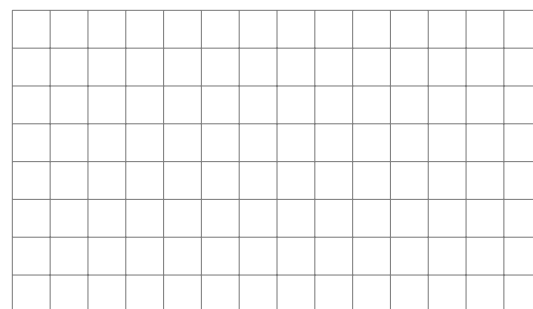


Théorème.

Égalité de deux vecteurs - parallélogramme

○ Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{KL}$ sont égaux si, et seulement si, $ABLK$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).

○ Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{KL}$ sont égaux si, et seulement si, $[AL]$ et $[BK]$ ont même milieu.



Théorème.

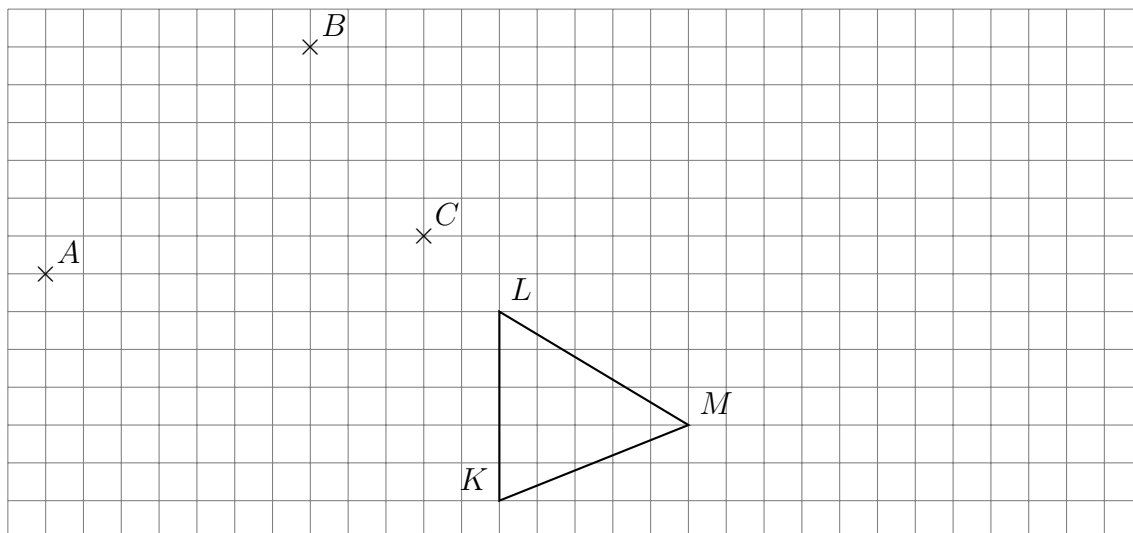
L'image d'une droite par une translation est une droite parallèle.

À travailler en complément : Démonstration de " L'image de la droite (MP) par la translation de vecteur (AB) est parallèle à (MP) ".

2 Sommes de vecteurs

Exemple(s) de cours 1 : Enchaînement de translations

- [1] Construire l'image du triangle KLM par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. On l'appelle $K_1L_1M_1$.
- [2] Construire l'image du triangle $K_1L_1M_1$ par le vecteur $\overrightarrow{BC}$. On l'appelle $K_2L_2M_2$.
- [3] Quelle est l'image de KLM par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$?



Théorème.

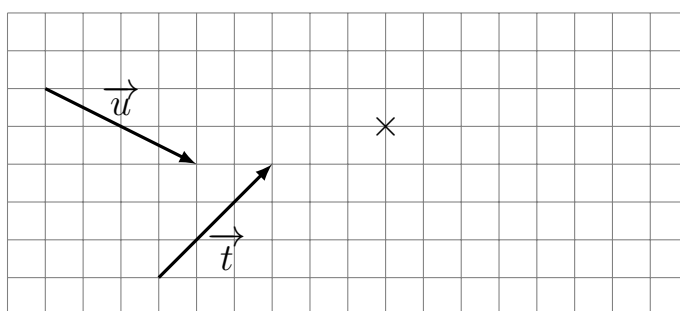
L'enchaînement de deux translations est une translation.

En mathématique, on utilise aussi le terme de composition pour parler de l'enchaînement de deux transformations.

Définition.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{t}$ deux vecteurs.

La somme $\vec{u} + \vec{t}$ est le vecteur de l'enchaînement des translations des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{t}$.



Théorème. Relation de Chasles

Quels que soient 3 points A , B et C , on a :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Théorème. Commutativité de la somme

Pour additionner deux vecteurs, l'ordre de l'addition ne change pas le résultat.

Remarques :

- c'est pour cela que l'on appelle cette opération addition ou somme et qu'on la note avec le même symbole que la somme des nombres car elle a les mêmes propriétés.
- Quels que soient 3 points A , B et C , on a :

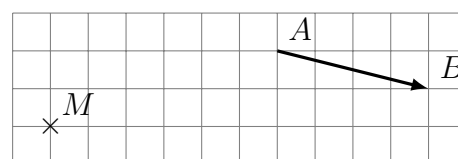
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$$

- Quels que soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

Sommes particulières**Exemple(s) de cours 2 :**

Quelle est l'image de M par l'enchaînement de la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ avec celle de vecteur $\overrightarrow{BA}$?

**Définition. Nul et opposé**

- Le vecteur de la translation qui ne fait bouger aucun point est le vecteur nul, on le note $\vec{0}$.
- Le vecteur qui ajouté à $\vec{u}$ donne $\vec{0}$ est l'**opposé** de $\vec{u}$, on le note $-\vec{u}$.

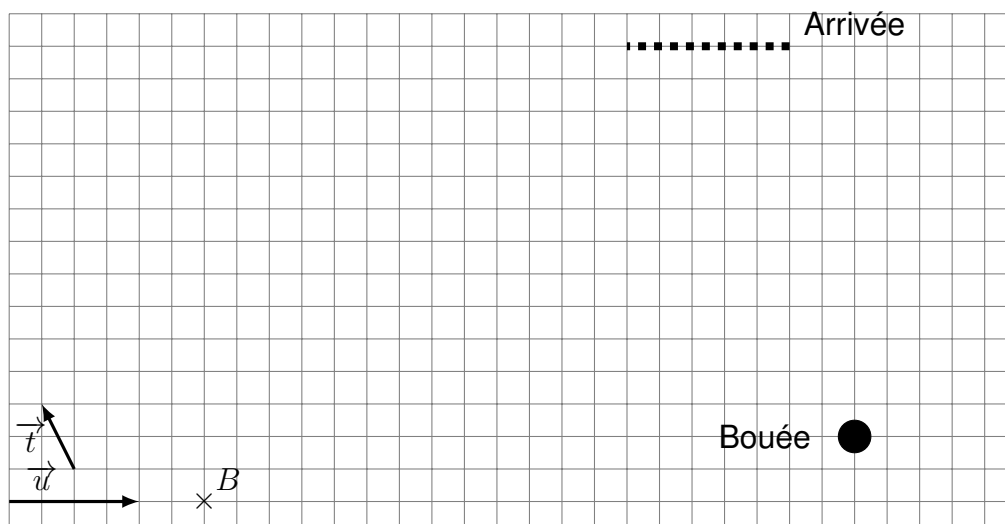
$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{u} - \vec{u} = \vec{0}$$

- Pour tous points A et B , on a :

$$-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$$

Enchaînement de translations

Quel enchaînement de translations peut suivre le bateau en B pour passer la ligne d'arrivée tout en contournant la bouée ?



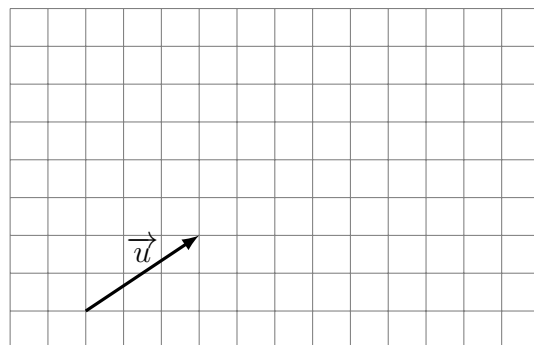
3 Produit d'un vecteur par un nombre réel

Définition. Multiplication

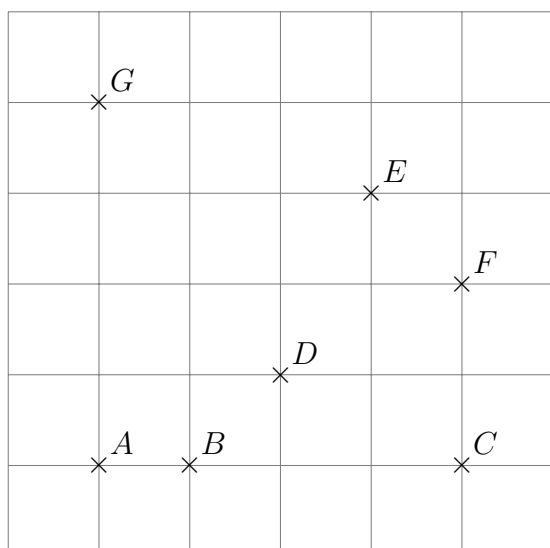
$\vec{u}$ est un vecteur et k un nombre réel.

Le produit de $\vec{u}$ par k est le vecteur noté $k\vec{u}$ tel que :

- $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ ont la même direction,
- $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ ont le même sens si $k > 0$ et des sens opposés si $k < 0$,
- la norme de $k\vec{u}$ est le produit de celle de $\vec{u}$ par la valeur absolue de k .



Exemple(s) de cours 3 :



Compléter si possible par le nombre réel qui convient.

[1] $\vec{AC} = \dots \vec{AB}$,

[2] $\vec{CA} = \dots \vec{AB}$,

[3] $\vec{AE} = \dots \vec{AD}$,

[4] $\vec{AE} = \dots \vec{BD}$,

[5] $\vec{AF} = \dots \vec{AD}$,

[6] $\vec{FA} = \dots \vec{AD}$,

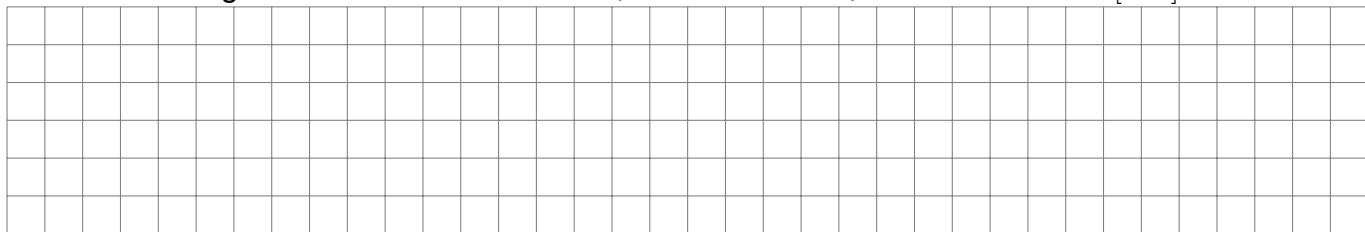
[7] $\vec{CG} = \dots \vec{BD}$,

[8] $\vec{CG} = \dots \vec{EF}$.

Égalités vectorielles et propriétés géométriques

Théorème.

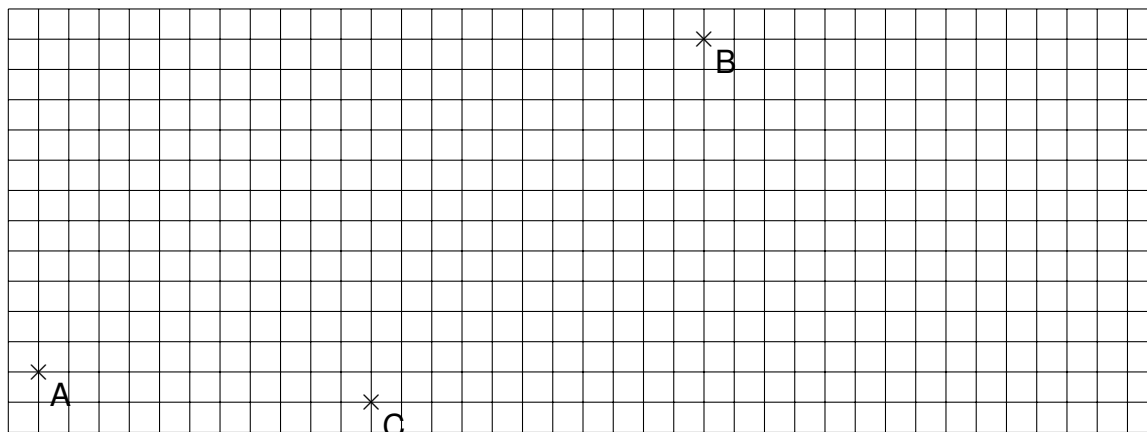
Chacune des égalités suivantes est vraie si, et seulement si, I est le milieu de $[AB]$.



Théorème.

Les points distincts A , B et C sont alignés si, et seulement s'il existe un nombre réel k non nuls tel que :

$$\vec{AB} = k\vec{AC}$$



- [1] Placer sur la figure l'image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ sans utiliser d'instrument de géométrie.
- [2] Expliquer la démarche suivie.

4 Coordonnées d'un vecteur

Définition.

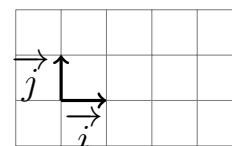
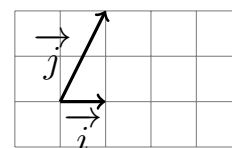
Soient $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs.

On dit que $(\vec{i}, \vec{j})$ forment une **base** des vecteurs du plan s'ils ne sont pas colinéaires.

On dit que $(\vec{i}, \vec{j})$ forment une **base orthonormée** des vecteurs du plan si :

ORTHONORMÉE les directions de $\vec{i}$ et de $\vec{j}$ forment un angle droit ^a,

ORTHONORMÉE les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont même norme : 1,



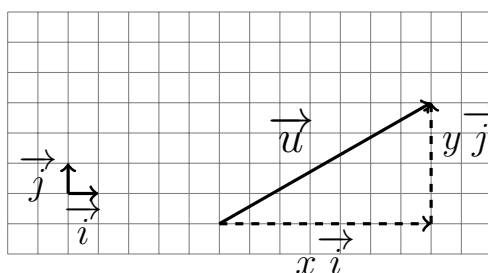
a. Penser à ORTHODOxe, ORTHOCentre

Théorème.

et Définition.

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base des vecteurs du plan, alors tout vecteur $\vec{u}$ s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire de $\vec{i}$ et de $\vec{j}$:

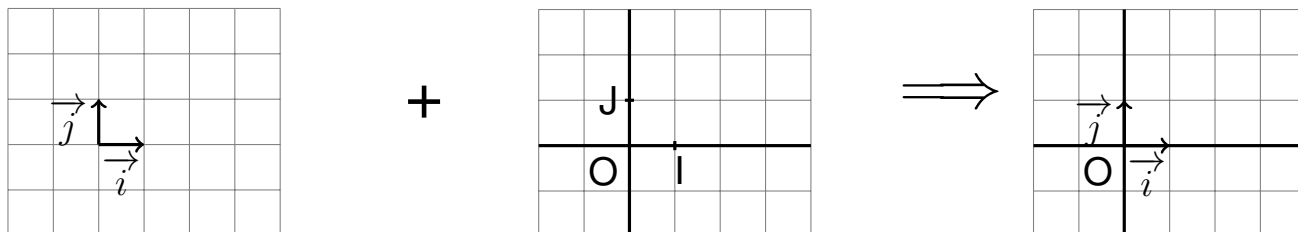
$$\vec{u} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}$$



x et y sont les **coordonnées** de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

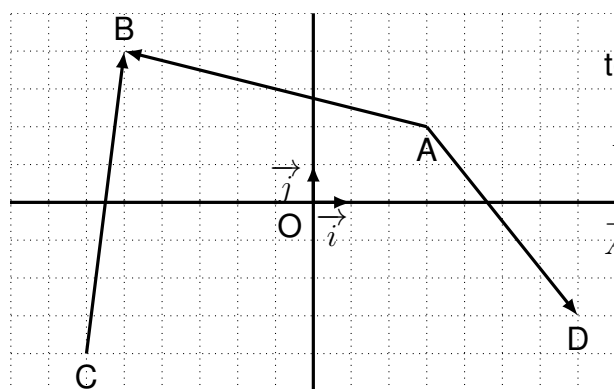
Remarque : On les notera de préférence en colonne : $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ou $\vec{u} \begin{pmatrix} x\vec{u} \\ y\vec{u} \end{pmatrix}$. (même si de nombreux livres/professeurs/sites internet/... les notent en ligne $(x; y)$ au risque de créer une confusion avec les coordonnées de points.)

Lien avec les coordonnées des points et le repère (O, I, J) habituel



On peut donc aussi définir un repère par la donnée d'un point *l'origine*, et d'une base orthonormée des vecteurs : $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Dans ce repère on peut définir et utiliser simultanément les coordonnées des points et les coordonnées des vecteurs.

Exemple(s) de cours 4 :



Lire les coordonnées des points et des vecteurs représentés :

$A(\dots; \dots), B(\dots; \dots), C(\dots; \dots), D(\dots; \dots)$

$\vec{AB} \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}, \vec{CB} \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}, \vec{BC} \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}, \vec{AC} \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}, \vec{AD} \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$

Dans la suite du cours, on considèrera que le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

5 Coordonnées et calculs

Théorème.

$\vec{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

Exemple(s) de cours 5 : Détecter un parallélogramme On considère les points suivants :

$A(1295; 327); B(291, 1886); C(-437; 1648); D(568; 90) E(567; 89)$

$ABCD$ est-il un parallélogramme ? Et $ABCE$?

Théorème.

On considère deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et k un nombre réel.

$$\vec{u} + \vec{w} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$$

$$k \cdot \vec{u} \text{ a pour coordonnées } \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$$

Exemple(s) de cours 6 : calculs de coordonnées**Théorème. Longueur et norme**

On se place dans une **base orthonormée**.

Si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est un vecteur, A et B deux points, alors :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ et } \|\vec{AB}\| = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Exemple(s) de cours 7 : calculs de longueurs**Théorème. Translation**

Si A est un point et $\vec{u}$ un vecteur, alors l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées :

$$(x_A + x_{\vec{u}}; y_A + y_{\vec{u}})$$

Exemple(s) de cours 8 : calculs de coordonnées - partie 2

6 Colinéarité

Définition. Colinéarité

Deux vecteurs non nuls sont colinéaires s'ils ont la même direction.
Le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire à tous les vecteurs.

Définition. Déterminant de deux vecteurs

Le déterminant de deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ est : $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$

Théorème. Critères de colinéarités**sans coordonnées :**

Deux vecteurs sont colinéaires si, et seulement si l'un est le produit de l'autre par un nombre réel.

avec coordonnées 1 :

Deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles.

avec coordonnées 2 :

Deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si le déterminant

$$\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y \text{ est nul.}$$

Exemple(s) de cours 9 : Utilisation du déterminant**Applications à l'alignement et au parallélisme****Théorème.**

Deux droites (TR) et (GK) sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{TR}$ et $\overrightarrow{GK}$ sont colinéaires.

Exemple(s) de cours 10 : Étude du parallélisme

- On considère les points $A(13; 35)$, $B(-10; 27)$, $C(-2; 5)$ et $D(67; 29)$.
Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?
- On considère les points $Q(3; 12)$, $S(-6; 5)$, $D(-2; 5)$ et $F(25; 25)$.
Les droites (QS) et (DF) sont-elles parallèles ?

Théorème.

Trois points D , T et U sont alignés si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{DT}$ et $\overrightarrow{TU}$ sont colinéaires.

Exemple(s) de cours 11 : Étude de l'alignement

- On considère les points $A(3; 12)$, $B(-6; 5)$ et $C(30; 33)$.
Les points A , B et C sont-ils alignés ?
- On considère les points $P(5; 9)$, $K(8; -12)$ et $G(-4; 71)$.
Les points P , K et G sont-ils alignés ?