

63,64 page 153

Exercices d'entraînement63, 64, 66 p 153 et M3 page 160

$$\boxed{63} \quad 78 \equiv 1[7] \text{ donc } 78^{115} \equiv 1^{115}[7]$$

$$\underline{78^{115} \equiv 1[7]}$$

$$92 = 13 \times 7 + 1$$

$$\text{Donc } 92 \equiv 1[7]$$

$$\text{par suite } 92^{23} \equiv 1^{23}[7]$$

$$\underline{92^{23} \equiv 1[7]}$$

$$106 = 3 \times 35 + 1$$

$$= 15 \times 7 + 1$$

$$\text{Donc } 106 \equiv 1[7]$$

$$\text{dr. } 106^{35} \equiv 1^{35}[7]$$

$$\text{Donc } 106^{35} \equiv 1[7]$$

Des 3 résultats précédents on déduit que

$$78^{115} + 92^{23} + 106^{35} \equiv 3[7]$$

$$\boxed{64} \quad A = 877 + 59^{43}$$

$$\textcircled{a} \quad 59 = 56 + 3 \quad \text{Donc } 59 \equiv 3[7]$$

$$= 8 \times 7 + 3$$

$$3^2 = 9 \equiv 2[7] \quad \text{Donc } 3^6 \equiv 2^3[7]$$

$$3^6 \equiv 1[7]$$

$$\textcircled{b} \quad 43 = 6 \times 7 + 1$$

$$\text{Donc } 3^{43} = (3^6)^7 \times 3$$

$$\text{On en déduit que } 3^{43} \equiv 1^7 \times 3[7] \text{ et } 3^{43} \equiv 3[7]$$

$$c) \quad 59 \equiv 3 [7]$$

$$\text{donc } 59^{43} \equiv 3^{43} [7]$$

$$\text{or, on sait que : } 3^{43} \equiv 3 [7],$$

$$\text{Donc } \underline{59^{43} \equiv 3 [7]}$$

$$\begin{array}{r|l} 877 & 7 \\ 17 & 125 \\ 37 & \\ 2 & \end{array}$$

$$\text{Donc } 877 = 7 \times 125 + 2$$

$$\underline{877 \equiv 2 [7]}$$

Des deux résultats soulignés, on déduit que :

$$A \equiv 3 + 2 [7]$$

$$\underline{A \equiv 5 [7]}$$

165] Réponse non rédigée

$$30 \equiv 2 [7]$$

$$2^5 = 32 \equiv -3 [7]$$

$$\text{donc } 2^{10} \equiv 9 [7]$$

$$2^{10} \equiv 2 [7]$$

$$30^{10} \equiv 2 [7]$$

$$125 = 140 - 14 - 1$$

$$\text{Donc } 125 \equiv -1 [7]$$

$$125^{17} \equiv (-1)^{17} [7]$$

$$\equiv -1 [7]$$

Donc

$$A \equiv -2 [7]$$

$$\text{or } A \equiv 5 [7]$$

Le reste cherché est donc 5

113p160

113 page 160① On note $N = \overline{abcdabcd}$

$$\begin{aligned}
 N &= a(10^7 + 10^3) + b(10^6 + 10^2) + c(10^5 + 10^1) + d(10^4 + 1) \\
 &= (10^4 + 1)[10^3a + 10^2b + 10c + d] \\
 &= 10001 \overline{abcd}
 \end{aligned}$$

$$10001 = 73 \times 137$$

Donc 137 divise 10001

comme 10001 divise N , on en déduit que 137 divise N .

② a) $5n+3 = 2(2n+3) + n-3$

* si $n \geq 3$, alors $n-3 \geq 0$ et $n-3 < 2n+3$
 donc $q = 2n+3$ et $r = n-3$

* $5n+3 = 2n+3 + 3n$

si $n < 3$, alors en ajoutant $2n$ aux deux membres de l'inégalité, on obtient : $3n < 2n+3$.

On pose donc $q=1$ et $r=3n$.b) Soit n un entier naturel tel que $(2n+3)$ divise $(5n+3)$.

1^{er} cas si $n \geq 3$ alors le reste de la division de $5n+3$ par $2n+3$ est $n-3$.

Donc $n-3 = 0$ et $n=3$

$$\begin{array}{l}
 2n+3 = 9 \\
 5n+3 = 18
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} 2n+3 = 9 \\ 5n+3 = 18 \end{array}} \right\} \text{3 est bien solution.}$$

2^{ième} cas si $m < 3$ alors le reste de la division de $5m+3$ par $2m+3$ est $3m$
 donc $3m = 0$
 i.e. $m = 0$

$$\left. \begin{array}{l} 2m+3=3 \\ 5m+3=3 \end{array} \right\} \text{Donc } 0 \text{ est solution.}$$

Deux solutions : 0 et 3

$$(3) (a) \quad m^2 + 3m + 7 - (m+1)(m+2) = m^2 + 3m + 7 - (m^2 + 3m + 2)$$

$$(b) \quad \left. \begin{array}{l} m+1 \text{ divise } m^2 + 3m + 7 \\ m+1 \text{ divise } m+1 \end{array} \right\} = 5$$

~~Donc : $m^2 + 3m + 7 - (m+2)(m+1)$ divise $m^2 + 3m + 7$~~

~~Par suite 5 divise $m^2 + 3m + 7$.~~

Donc $(m+1)$ divise $m^2 + 3m + 7 - (m+2)(m+1) = 5$

(c) Etude des valeurs possibles

$m+1$	m	$m^2 + 3m + 7$	Vérification
-5	-6	—	$m \notin \mathbb{N}$
-1	-2	—	$m \notin \mathbb{N}$
1	0	7	1 divise 7
5	4	35	5 divise 35

Il y a deux solutions : 0 et 4.

④ a) ~~2^2 = 4~~

$$2^2 = 4 ; 2^4 = 16 = 15 + 1$$

Donc $2^4 \equiv 1 [5]$

⑤ $2^4 \equiv 1 [5]$ donc $(2^4)^k \equiv 1^k [5]$

$$2^{4k} \equiv 1 [5]$$

par suite : $2^{4k+n} \equiv 2^n [5]$

⑥ On note $m = 4k + r$ la division euclidienne de m par 4. On a donc $r \in \{0; 1; 2; 3\}$.

de ⑤, on déduit que $2^m \equiv 2^r [5]$.

D'où les résultats suivants.

Reste de m modulo 4	Reste de 2^m modulo 5
0	1
1	2
2	4
3	3

⑦ $17 = 15 + 2$ donc $17 \equiv 2 [5]$

or $17^{4p+2} \equiv 2^{4p+2} [5]$

d'où $17^{4p+2} \equiv 4 [5]$ (Résultat dec)

$32 = 30 + 2$ donc $32 \equiv 2 [5]$

$2^{4p+3} \equiv 3 [5]$ (Résultat dec)

d'où $32^{4p+3} \equiv 3 [5]$

Conclusion : $17^{4p+2} + 32^{4p+3} + 3 \equiv 4 + 3 + 3 [5] \equiv 0 [5]$

59 page 153

(a) $113 = 12 \times 9 + 5$

Donc $113 \equiv 5[12]$

113 heures après avoir indiqué 2h, l'horloge indique $2 + 5 = 7h$.

(b) $156 = 120 + 36 = 12 \times 13$

Donc $156 \equiv 0[12]$.

156h plus tard l'horloge indique la même heure, ici 6h.

60 page 153

(a) $5^2 = 25 = 26 - 1 = 2 \times 13 - 1$

donc $5^2 \equiv -1[13]$

en élevant au carré, on obtient :

$$(5^2)^2 \equiv (-1)^2 [13]$$

$$5^4 \equiv 1[13]$$

(b) Soit n un entier naturel, on a : $5^{4n} = (5^4)^n$. en élevant les membres de la relation de congruence précédente à la puissance n , on obtient :

$$5^{4n} \equiv 1^n[13]$$

$$5^{4n} \equiv 1[13]$$

61 page 153

$$x \equiv -3[5] \iff x - (-3) \equiv 0[5]$$

$$\iff x + 3 \equiv 0[5]$$

Les solutions de l'équation sont donc les entiers naturels x tels que $x + 3$ est un multiple de 5. x est solution si, et seulement si, il existe un entier k tel que : $x + 3 = 5k$

autrement dit :

 x est solution si, et seulement si, il existe un entier k tel que : $x = -3 + 5k$

$$-3 + 5k \geq 0 \iff 5k \geq 3$$

$$\iff k \geq \frac{3}{5}$$

il faut donc que k soit un entier naturel non nul.

$$S = \{-3 + 5k; k \in \mathbb{N}^*\}$$

62 page 153

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 4 \equiv -1[7] \end{array} \right.$$

$$x + 4 \equiv -1[7] \iff x + 5 \equiv 0[7]$$

il existe un entier k tel que $x + 5 = 7k$ il existe un entier k tel que $x = 7k - 5$

En utilisant l'encadrement du système, déterminons les valeurs de k qui nous fournissent des solutions.

$$\begin{aligned} -50 \leq 7k - 5 \leq 100 &\iff -45 \leq 7k \leq 105 && (\text{En ajoutant 5 à chaque membre}) \\ &\iff \frac{-45}{7} \leq k \leq \frac{105}{7} && (\text{En divisant par 7 à chaque membre (7 est positif)}) \end{aligned}$$

$$\frac{-45}{7} \approx -6,4 \text{ et } \frac{105}{7} = 15$$

Donc k doit être compris entre -6 et 15.

$$S = \{7k - 5; k \in \llbracket -6; 15 \rrbracket\}$$

68 page 153

[1] (a) $6^2 = 36 = 3 + 3 \times 11$ donc $6^2 \equiv 3[11]$

$$3^3 = 27 = 5 + 2 \times 11 \text{ donc } 3^3 \equiv 5[11]$$

On sait que $(6^2)^3 = 6^6$ donc $6^6 \equiv 3^3[11]$ et par suite $6^6 \equiv 5[11]$

$$6^{10} = 6^2 6^2 6^6 \text{ Donc } 6^{10} \equiv 3 \times 5 \times 5[11]$$

$$3 \times 5 \times 5 = 75 = 6 \times 11 + 9$$

$$\text{Donc } 6^{10} \equiv 9[11]$$

(b) Soit k un entier naturel.

On sait que : $6^{10k} = (6^{10})^k$

$$\text{Or } 6^{10} \equiv 9[11]$$

$$\text{Donc } 6^{10k} \equiv 9^k[11]$$

$$\text{Et, par suite : } 6^{10k} \equiv 9^k[11]$$

[2] (a) Pour un entier naturel n , on note p le reste de sa division euclidienne par 10. C'est une manière un peu compliquée de parler de son chiffre des unités !!!

Il existe un entier naturel k tel que : $n = 10k + p$

$$6^n = 6^{10k} \times 6^p$$

$$\text{Comme } 6^{10k} \equiv 9^k[11],$$

$$\text{Forcément, on a : } 6^n \equiv 9^p[11]$$

Il suffit de faire la liste des 10 cas à étudier :

- Pour $p = 0$: $6^p = 1$.

$$\text{Donc } 6^p \equiv 1[11].$$

Le reste est 1.

- Pour $p = 1$: $6^p = 6$.

$$\text{Donc } 6^p \equiv 6[11]$$

Le reste est 6.

- Pour $p = 2$: $6^p = 36$.

$$\text{Donc } 6^p \equiv 4[11]$$

Le reste est 4

- Pour $p = 3$: $6^p \equiv 3 \times 6[11]$.

$$3 \times 6 = 18 = 7 + 11. \text{ Donc } 6^p \equiv 7[11]$$

Le reste est 7.

- Pour $p = 4$: $6^p \equiv 7 \times 6[11]$.

$$7 \times 6 = 42 = -2 + 44. \text{ Donc } 6^p \equiv -2[11] \equiv 9[11]$$

Le reste est 9.

- Pour $p = 5 : 6^p \equiv -2 \times 6[11]$.
 $-2 \times 6 = -12 = -1 - 11$. Donc $6^p \equiv -1[11] \equiv 10[11]$
 À partir de ce moment on peut changer de stratégie de calcul en utilisant $6^p = 6^{p-5} \times 6^5$ puis en réutilisant les résultats que nous venons d'obtenir.
 Car multiplier par -1 c'est facile !
 - Pour $p = 6 : 6^p \equiv -1 \times 6^1[11]$.
 Donc $6^p \equiv -6[11] \equiv 5[11]$.
 Le reste est 5.
 - Pour $p = 7 : 6^p \equiv -1 \times 6^2[11]$.
 Donc $6^p \equiv -3[11] \equiv 8[11]$
 Le reste est 8.
 - Pour $p = 8 : 6^p \equiv -1 \times 6^3[11]$.
 Donc $6^p \equiv -7[11] \equiv 4[11]$
 Le reste est 4.
 - Pour $p = 9 : 6^p \equiv -1 \times 6^4[11]$.
 Donc $6^p \equiv -9[11] \equiv 2[11]$.
 Le reste est 2.
 - Pour $p = 10 : 6^p \equiv -1 \times 6^5[11]$.
 Donc $6^p \equiv 1[11]$
 Le reste est 1 mais on le savait déjà.
- (b) le chiffre des unités de 1003 est 3, donc le reste de la division euclidienne de 6^{1003} par 11 est 7.

(74)

• Tableau de restes modulo 5

n	0	1	2	3	4
n^5	0	1	2	3	4
$n^5 - n$	0	0	0	0	0

• $2^5 = 32 \equiv 2 [5]$

• $3^5 = 3^2 \times 3^3$

$3^5 \equiv 4 \times 2 [5]$

$3^5 \equiv 8 [5]$

$3^5 \equiv 3 [5]$

• $4^5 = (2^2)^5 = 2^{10} = 1024 = 4 + 1020$
 $= 4 + 5 \times 204$

d'où $4^5 \equiv 4 [5]$

On a bien pour tout n de $\mathbb{N}$

$$n^5 - n \equiv 0 [5]$$

(77) (a) $m \in \mathbb{Z}$

Restes modulo 7

m	0	1	2	3	4	5	6
m^3	0	1	1	-1	1	-1	-1
$2m^3$	0	2	2	-2	2	-2	-2
				5		5	5

$$3^3 = 27 = 28 - 1$$

$$4^3 = 64 = 63 + 1$$

$$5^3 = 125 = -1 + 126$$

$$6^3 = 216 = 210 + 6 = 217 - 1$$

(b) Pour tout x de $\mathbb{Z}$, $7x^2$ est un multiple de 7
donc $7x^2 \equiv 0 [7]$.

Par suite pour $y \in \mathbb{Z}$: $7x^2 + 2y^3 \equiv 2y^3 [7]$

Les restes sont donnés dans le tableau de la question 1

$$\begin{array}{r} 1081 \\ 38 \\ 31 \\ \textcircled{3} \end{array} \bigg| \begin{array}{r} 7 \\ 154 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3697 \\ 19 \\ 57 \\ \textcircled{4} \end{array} \bigg| \begin{array}{r} 7 \\ 528 \end{array}$$

(77)

Les restes modulo 7 de 1081 et 3697 sont respectivement 3 et 1.

3 et 1 ne peuvent pas être des restes de la division de $7x^2 + 2y^3$ par 7 car seuls 0, 2 et 5 sont possibles.

Donc il n'y a aucun couple d'entiers (x, y)

$$\text{tels que : } 7x^2 + 2y^3 \equiv 1081 [7]$$

ou

$$7x^2 + 2y^3 \equiv 3697 [7]$$

Cela implique que pour tout couple d'entiers (x, y) , on a $7x^2 + 2y^3 = 1081$

$$\text{et } 7x^2 + 2y^3 = 3697$$

l'erreur de calcul a été corrigée

(103)

$$a) 7^3 = 7 \times 49 = 343 = 342 + 1$$

$$= 9 \times 38 + 1$$

$$= 9 \times 38 + 1$$

$$\begin{array}{r|l} 343 & 9 \\ 73 & 38 \\ \hline 2 & \end{array}$$

$$\text{donc } 7^3 \equiv 1 [9]$$

$$\text{Pour } k \in \mathbb{N}: 7^{3k} = (7^3)^k$$

$$\text{donc } 7^{3k} \equiv 1^k [9]$$

$$7^2 = 49 = 45 + 4 = 5 \times 9 + 4$$

$$\text{donc } 7^2 \equiv 4 [9]$$

$$\text{On en déduit que: } 7^{3k} \times 7^2 \equiv 1^k \times 4 [9]$$

$$7^{3k+2} \equiv 4 [9]$$

(b)

$$\text{Soit } p \in \mathbb{N}: V_p = 7^p$$

$$V_p \text{ est un terme de } (U_n) \iff \text{il existe dans } \mathbb{N} \text{ tel que } 7^p = 4 + 9m$$

$$\iff 7^p \equiv 4 [9]$$

$$\text{On sait que pour } k \in \mathbb{N}: 7^{3k+2} \equiv 4 [9]$$

donc pour tout k de $\mathbb{N}$, il existe un entier m

$$\text{tel que } U_n = V_{3k+2}$$

Comme $\mathbb{N}$ est infini, (U_n) et (V_n) ont une infinité de termes égaux.

(104) ① Soit $m \in \mathbb{N}$

$$7 \equiv -1 [4]$$

$$7^m \equiv (-1)^m [4]$$

si m est pair $(-1)^m = 1$

$$\text{alors } 7^m \equiv 1 [4]$$

si m est impair $(-1)^m = -1$

$$\text{alors } 7^m \equiv -1 [4]$$

$$7^m \equiv 3 [4]$$

② On étudie $A_m = 7^{m+1} - 7^m(m+1) - 1$
Voici le tableau des restes modulo 4

m	0	1	2	3
7^m	1	3	1	3
7^{m+1}	3	1	3	1
$(m+1)$	1	2	3	0
A_m	1	1	-1	0

Les solutions de $A_m \equiv 0 [4]$ sont donc
les entiers m tels que $m \equiv 3 [4]$.