

3 Conjugué

Définition : *Conjugué d'un nombre complexe*

Soit z un nombre complexe d'écriture algébrique $z = a + ib$.

Le conjugué de z est le nombre $\bar{z}$ défini par :

$$\bar{z} = a - ib$$

Exemples : Calculs de conjugués à partir de formes algébriques et de cas plus compliqués.

Les cas simples.

$$\overline{4 + 3i} = 4 - 3i$$

$$\overline{5 - \frac{3}{8}i} = 5 - \left(-\frac{3}{8}\right)i = 5 + \frac{3}{8}i$$

$$\overline{-3 + 9i} = -3 - 9i$$

$$\overline{-3 - 12i} = -3 - (-12)i = -3 + 12i$$

$$\overline{3i} = -3i$$

$$\overline{-\frac{1}{7}i} = \frac{1}{7}i$$

Les cas moins simples. Pour déterminer le conjugué d'un nombre complexe z , il faut dans un premier temps déterminer la forme algébrique de z .

$$\begin{aligned} \overline{(3 - 6i)^2} &= \overline{9 - 36i + 36i^2} \\ &= \overline{9 - 36i - 36} \\ &= \overline{-27 - 36i} \\ &= -27 + 36i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\left(\frac{3 + 5i}{-7 + 3i}\right)} &= \overline{\left(\frac{(3 + 5i)(-7 - 3i)}{(-7 + 3i)(-7 - 3i)}\right)} \\ &= \overline{\left(\frac{-21 - 9i - 35i - 15}{7^2 + 3^2}\right)} \\ &= \overline{\left(\frac{-36 - 44i}{58}\right)} \\ &= \overline{\left(\frac{-36}{58} - \frac{44}{58}i\right)} \\ &= \frac{-36}{58} + \frac{44}{58}i \end{aligned}$$

Exercice 1 . Dans le manuel , traiter l'exercice 56 page 31 en utilisant une seule façon pour déterminer le conjugué.

Si vous avez l'impression d'avoir déjà rencontré des conjugués, tournez la page.

Si vous voulez savoir comment déterminer des conjugués plus facilement dans les cas moins simples

Sinon ... tournez la page quand même¹

1. ces phrases ne servent à rien, mais il y avait de toutes façons une place à combler à cause du saut de page

Ceci est une pseudo-anecdote connue dans le monde des classes préparatoires scientifiques et écoles d'ingénieurs, à visée humoristique, probablement motivée par une certaine jalousie à l'encontre des heureux.ses admis.es à l' $\mathcal{X}$.

Je tiens à éviter tout malentendu, je n'ai rien contre les polytechniciens.



C'est un polytechnicien à qui on pose un premier problème : « Tu es dans une cuisine, tu as une casserole vide, un robinet d'eau et une cuisinière. Comment fais-tu pour faire bouillir de l'eau ? »

Le polytechnicien réfléchit une seconde et répond : « C'est simple. Je prends la casserole, je la remplis d'eau au robinet, je la pose sur la cuisinière et j'allume le feu. »

« Parfait », lui dit-on. On lui pose alors un second problème : « Maintenant, tu es dans la même cuisine, mais la casserole est déjà remplie d'eau et elle est posée sur la table. Comment fais-tu pour faire bouillir l'eau ? »

Le polytechnicien sourit et répond immédiatement : « Je vide la casserole, et je me ramène ainsi au problème précédent que je sais déjà résoudre ! »



Cette anecdote a sa place car elle permet dans certains cas de réduire une démonstration qui peut être fastidieuse en "vidant la casserole"

A faire :

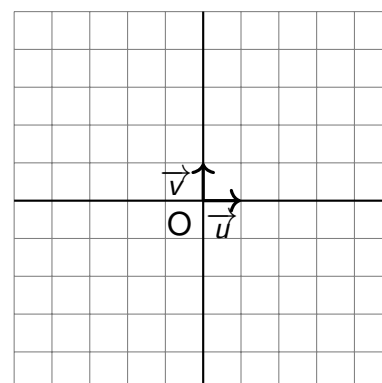
- Démontrer que le conjugué du produit de deux nombres est le produit du conjugué de ces deux nombres
- "Vider la casserole " : Utiliser le résultat précédent pour démontrer que l'inverse du conjugué d'un nombre complexe z est le conjugué de l'inverse de z sans utiliser la forme algébrique $z = a + ib$.

Lien entre conjugué et transformation géométrique.

Pour i dans $\llbracket 1; 4 \rrbracket$, on note M_i le point d'affixe z_i et P_i le point d'affixe $\bar{z}_i$.

$$z_1 = 3 + 2i; \quad z_2 = -4 + i; \quad z_3 = 2i; \quad z_4 = (1 - i)^2$$

Placer les points M_i d'une couleur, et les points P_i d'une autre couleur.



Théorème : Interprétation géométrique de la conjugaison

Les points $M(z)$ et $P(\bar{z})$ sont symétriques l'un de l'autre par rapport à l'axe des réels.

Théorème : *Propriétés de caractérisation par conjugaison*

[1] “*z est réel*” équivaut à $z = \bar{z}$.

[2] “*z est imaginaire pur*” équivaut à $z = -\bar{z}$

Démonstration : à faire en utilisant la forme algébrique $z = a + ib$.

Théorème : *Propriété du conjugué*

Soit z un nombre complexe.

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}; \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

Démonstration : à faire en utilisant la forme algébrique $z = a + ib$.

Que faire ce vendredi 9/10 en S1 pendant le week end ?

- Étudier les correction des exercices (voir sur le site du prof www.bougeardg.fr)
- Lire ce document en entier en :
 - traitant les deux exercices demandés dans ce document,
 - réalisant la démonstration pour le produit et l'inverse d'un conjugué.
 - réalisant les deux démonstrations de la page 4.
- c'est peut-être un peu long, cela peut être par moment difficile, mais tout sera revu en classe. Notez vos questions !!!