

4 Épanadiplose : résolutions d'équations

L'épanadiplose narrative est une figure de narration : il s'agit de la reprise d'une scène initiale à la fin de l'intrigue. Cette figure suggère une fermeture du récit sur lui-même.

Les techniques de résolution des équations étudiées sur $\mathbb{R}$ (addition ou soustraction d'un même nombre, multiplication ou division par un même nombre non nul) fonctionnent exactement de la même manière dans $\mathbb{C}$.

Par ailleurs, $\mathbb{C}$ vérifie la même propriété sur les produits et quotients nuls que $\mathbb{R}$:

Théorème : Produits et quotients nuls

Un produit de nombres complexes est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul.

Un quotient de deux nombres complexes est nul si, et seulement si, le numérateur est nul (et le dénominateur est non nul).

a. Equations à coefficients complexes

Ces équations se résolvent à l'aide des mêmes méthodes que les équations à coefficients réels ... sauf une.

$$(E_1) -2iz = 3z + 1$$

$$(E_2) 7i\bar{z} = 3(2i - \bar{z})$$

$$(E_3) \frac{2iz + i}{z - 1 - i} = 3$$

$$(E_4) (z - i)^2 = (z + 1 + i)^2$$

$$(E_5) 5\bar{z} - 3 + 2iz = 2$$

b. Equations algébriques de degré 2

Exemples :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$(E1) \quad x^2 = 9$$

$$(E2) \quad x^2 = -36$$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$(E1) \quad x^2 = 9$$

$$(E2) \quad x^2 = -36$$

Remarque : On ne peut résoudre une équation qu'en rapport à un ensemble de résolution.

c. Second degré - cas général

On cherche à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(E) \quad ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{avec } a \neq 0$$

La mise sous forme canonique nous permet d'obtenir :

$$(E) \iff a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right) = 0 \quad \text{avec } \Delta = b^2 - 4ac$$

Nous avons vu en première :

- Si $\Delta \geq 0$ alors l'équation admet la factorisation :

$$(E) \iff \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2 = 0$$

$$(E) \iff \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) = 0$$

$$(E) \iff x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0 \text{ ou } x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0$$

$$(E) \iff x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

L'équation admet deux solutions réelles (éventuellement confondues si $\Delta = 0$)

- Si $\Delta < 0$ alors l'équation n'admet pas de solution réelle.



C'est ce dernier cas qui va nous intéresser cette année mais ce qui a été vu précédemment est encore vrai !

Le résultat obtenu reste valable, mais nous allons étudier l'existence de solutions dans $\mathbb{C}$.

On sait que : $\Delta < 0$.

On en déduit $-\Delta > 0$.

Par conséquent on peut définir : $\delta = \sqrt{-\Delta}$.

On a donc : $\delta^2 = -\Delta$ et surtout :

$$(i\delta)^2 = \Delta$$

On pourra donc utiliser la relation $(i\sqrt{-\Delta})^2 = \Delta$ pour résoudre l'équation, ainsi, le nombre Δ bien qu'il soit négatif s'écrit comme le carré d'un nombre.

Mais ce n'est pas le carré d'un nombre réel, c'est le carré d'un imaginaire pur.

Reprenant la résolution de l'équation :

$$\begin{aligned}(E) &\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2 = 0 \\(E) &\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a} - \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\right) = 0 \\(E) &\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} - \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} = 0 \text{ ou } x + \frac{b}{2a} + \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} = 0 \\(E) &\Leftrightarrow x = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ ou } x = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}\end{aligned}$$

L'équation (E) admet donc deux solutions complexes non réelles.

Théorème :

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$ se factorise en :

$$a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) = 0$$

avec $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta < 0$, cette équation admet : Deux solutions complexes conjuguées non réelles :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

On a alors :

$$ax^2 + bx + c = a(x - z_1)(x - z_2)$$

Exemples :

$$(E_1) \quad x^2 + x + 1 = 0$$

$$(E_2) \quad 3x^2 + 6x - 24 = 0$$