

Exercice 1 .

a, b et c sont trois entiers tels que a divise b et c .

Donc il existe deux entiers p et q tels que : $b = ap$ et $c = aq$

$$\begin{aligned} 5b + 9c &= 5ap + 9aq \\ &= a \times 5p + a \times 9q \\ &= a(5p + 9q) \end{aligned}$$

Donc a divise $5b + 9c$.

Exercice 2 .

(a) $35 = 3 \times 11 + 2 \equiv 2 [3]$	✓
(b) $25 = 5 \times 5 \equiv 0 [5]$	F
(c) $102 = 5 \times 20 + 2 \equiv 2 [5]$	✓
(d) $-13 = -2 \times 7 + 1 \equiv 1 [7]$	✓
(e) $-7 = -2 \times 6 + 5 \equiv 5 [8]$	✓
(f) $-25 = -3 \times 11 + 8 \equiv 8 [11]$	F

Exercice 3 .

(a) $537 = 31 \times 17 + 10$

(b) $37 > 17$ et $37 > 25$

donc l'égalité $462 = 17 \times 25 + 37$
ne peut pas être une division euclidienne
car 37 est trop grand pour être le reste.

537	31
227	17
-217	
10	

3) "Si $ab \equiv 0 [6]$, alors $a \equiv 0 [6]$ ou $b \equiv 0 [6]$ "

Exemple $a = 2; b = 3; a = 6$

$ab \equiv 0 [6]$ et a et b
peuvent ni a , ni b ne sont congrus à 0 modulo 6

Exercice 4 .

$$\begin{aligned}
 ① \quad & 2^0 = 1 \equiv 1 [5] \\
 & 2^1 = 2 \equiv 2 [5] \\
 & 2^2 = 4 \equiv 4 [5] \\
 & 2^3 = 8 \equiv 3 [5] \\
 & 2^4 \equiv 3 \times 2 [5] \\
 & \text{Donc } 2^4 \equiv 1 [5]
 \end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n = 4q + r$ sa division euclidienne par 4.

$$\begin{aligned}
 2^n &= 2^{4q+r} \\
 &= (2^4)^q \times 2^r
 \end{aligned}$$

$$2^4 \equiv 1 [5] \quad \text{donc} \quad (2^4)^q \equiv 1^q [5] \equiv 1 [5]$$

$$\text{On en déduit que } 2^n \equiv 2^r [5]$$

D'où les restes de 2^n modulo 5 suivants :

si $n \equiv 0 [4]$	alors $2^n \equiv 1 [5]$
si $n \equiv 1 [4]$	alors $2^n \equiv 2 [5]$
si $n \equiv 2 [4]$	alors $2^n \equiv 4 [5]$
si $n \equiv 3 [4]$	alors $2^n \equiv 3 [5]$

$$② \quad 2917 = 2915 + 2 \equiv 2 [5]$$

Nous allons donc étudier les puissances de 2 à l'aide du résultat de la question 1.

$$541 = 135 \times 4 + 1 \equiv 1 [4] \quad \text{Donc } 2^{541} \equiv 2 [5]$$

$$\text{et, par suite : } 2917^{541} \equiv 2 [5]$$

Exercice 5 .

$$(E) \quad 3x - 5y = 2$$

$$① \quad 3x - 5y = 2 \Leftrightarrow 3x = 2 + 5y.$$

$$\text{donc } 3x \equiv 2 [5]$$

② Restes Modulo 5

x	0	1	2	3	4
$3x$	0	3	1	4	2

donc si (x, y) est solution de (E), alors $x \equiv 4 [5]$
 et x s'écrit sous la forme $4 + 5k$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

$$③ \quad 3(4 + 5k) - 5y = 2$$

$$\Leftrightarrow 12 - 2 + 15k = 5y$$

$$\Leftrightarrow 10 + 15k = 5y$$

$$\Leftrightarrow 2 + 3k = y$$

$$Y = \{(4 + 5k; 2 + 3k) / k \in \mathbb{Z}\}$$